Structures de Weyl admettant des spineurs parallèles

Andrei Moroianu

STRUCTURES DE WEYL ADMETTANT DES SPINEURS PARALLÈLES

PAR

ANDREI MOROIANU [1]

RÉSUMÉ. – Etant donné une structure de Weyl D sur une variété spinorielle (M^n, g), et un spineur nonnul D-parallèle sur M, nous démontrons que D est fermée si $n \neq 4$, ou si M est compacte de dimension 4. Nous donnons des exemples de variétés spinorielles noncompactes de dimension 4 qui admettent des spineurs parallèles par rapport à des structures de Weyl qui ne sont pas fermées.

ABSTRACT. – We prove that given a Weyl structure D on a spin manifold (M^n, g), the existence of a non-zero D-parallel spinor on M implies that D is closed for $n \neq 4$. The same statement is true for $n = 4$ if M is compact. We give non-compact examples of 4-manifolds admitting parallel spinors with respect to non-closed Weyl structures.

1 Introduction

Les variétés spinorielles simplement connexes irréductibles admettant des spineurs parallèles ont été caractérisées du point de vue de leur groupe d'holonomie par N. Hitchin dans [4] (Théorème 1.2 et Remarque à la page 54; cf. aussi [9]) : ce sont les variétés à holonomie Spin(7), G_2, Sp(n) ou SU(n).

Soit (M^n, g), $n \geq 3$, une variété spinorielle simplement connexe. On considère ici le problème de l'existence des spineurs parallèles par rapport à une structure de Weyl quelconque D sur M qui est, évidemment, une généralisation du problème de l'existence des spineurs parallèles car la connexion de Levi-Civita est un cas particulier de structure de Weyl. Ce problème est invariant par transformations conformes de la métrique: tout spineur Ψ sur (M, g), parallèle par rapport à D, induit un spineur $\bar{\Psi}$ sur $(M, \bar{g})$, parallèle par rapport à D. Si D est exacte, alors D est la connexion de Levi-Civita d'une métrique $\bar{g}$ de la classe conforme de g,

[1] ANDREI MOROIANU, Centre de Mathématiques, C.N.R.S. URA 169, École Polytechnique, Palaiseau (France). Email : am@orphee.polytechnique.fr.

Classification AMS : 53 A 50, 53 C 07, 53 C 55.

Mots-clés: spineurs, structures de Weyl, structures hermitiennes.

donc il existe une solution (Ψ, D) avec D exacte si et seulement si (M, g) est conformément équivalente à une des variétés décrites ci-dessus.

On va, par conséquent, s'intéresser aux solutions nontriviales du problème, c.à.d. aux paires (Ψ, D) avec Ψ parallèle par rapport à D et D non-fermée. Le but de ce papier est de montrer qu'il n'y a pas de solution nontriviale si $n \neq 4$ ou si $n = 4$ et M compacte, et de construire des exemples de solutions nontriviales sur des variétés noncompactes de dimension 4.

Je remercie pour leur aide les membres du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, en particulier, P. Gauduchon pour les discussions que nous avons eues ensemble et qui ont permis à ce travail de prendre forme, et V. Apostolov a qui je dois l'exemple de la section 7.

Je remercie également J. P. Bourguignon pour le soutien scientifique et moral qu'il m'apporte depuis de nombreuses années.

2 Structures de Weyl

Une structure de Weyl sur une variété riemannienne (M, g), ou plus généralement conforme $(M, [g])$, est une connexion linéaire D, symétrique et préservant la structure conforme $[g]$. Une fois la métrique g fixée dans sa classe conforme, D est uniquement déterminée par un champ de vecteurs θ, identifié par g à une 1-forme sur M. La dérivée covariante de D est alors reliée à la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita de g par la formule

$$D_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \theta g(X, Y)\,, \qquad \forall X, Y\,. \tag{1}$$

Considérons un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f} g$, où f est une fonction strictement positive sur M. La forme $\bar{\theta}$ associée à $(D, \bar{g})$ est reliée à θ par

$$\bar{\theta} = \theta + df\,. \tag{2}$$

La structure de Weyl s'appelle fermée (resp. exacte) si la forme θ est fermée (resp. exacte), et la formule précédente montre que ceci ne dépend que de la classe conforme de g. Toute structure de Weyl exacte est fermée, et la réciproque est vraie dans le cas où M est simplement connexe.

Pour des détails et d'autres résultats sur les structures de Weyl on propose comme référence l'excellent papier de P. Gauduchon [5].

3 L'action d'une structure de Weyl sur le fibré des spineurs

On s'intéresse maintenant au cas d'une structure de Weyl D sur une variété spinorielle (M, g) et on veut calculer la formule de la dérivée covariante induite par D sur le fibré des spineurs ΣM. Soit $s = (X_1, \cdots, X_n)$ une section locale du fibré des repères orthonormés directes $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ qui induit une section locale $\tilde{s}$ de la structure spinorielle $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$. Si un spineur Φ s'écrit localement $\Phi = [\tilde{s}, \phi]$, où $\phi : U \subset M \to \Sigma_n$, alors on a (cf. [8], p. 110)

$$\begin{aligned}
D_X\Phi &= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle D_X X_j, X_k\rangle \cdot \Phi + [\tilde{s}, X(\phi)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle \nabla_X X_j + \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi \\
&\quad +[\tilde{s}, X(\phi)] \\
&= \nabla_X\Phi + \frac{1}{4}\sum_{j,k} X_j \cdot X_k \langle \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{j=k} X_j \cdot X_k \langle \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi \\
&= \nabla_X\Phi + \frac{1}{4}\left(-n\theta(X) + \theta\cdot X - X\cdot\theta\right)\Phi \\
&\quad +\frac{1}{4}\left(n\theta(X) + \langle\theta, X\rangle - \langle\theta, X\rangle\right)\Phi \\
&= \nabla_X\Phi - \frac{1}{2}X\cdot\theta\cdot\Phi - \frac{1}{2}\langle X, \theta\rangle\,\Phi\,.
\end{aligned}$$

Un spineur Φ s'appelle D-parallèle si $D_X\Phi = 0$, $\forall X$, donc, par ce qui précède, si

$$\nabla_X\Phi - \frac{1}{2}X\cdot\theta\cdot\Phi - \frac{1}{2}\langle X, \theta\rangle\,\Phi = 0, \quad \forall X\,. \tag{3}$$

Cette notion ne dépend que de la classe conforme de la métrique, dans le sens suivant: pour tout changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f}g$ on a une structure spinorielle sur $(M, \bar{g})$ canoniquement isomorphe à la structure spinorielle sur (M, g), et soit $\bar{\Psi}$ le spineur qui correspond à Ψ par cet isomorphisme. On a alors les relations (cf. [1], [3]):

$$\bar{X}\cdot\bar{\Psi} = \overline{X\cdot\Psi}\,, \tag{4}$$

$$\bar{\nabla}_X\bar{\Psi} = \overline{\nabla_X\Psi} + \frac{1}{2}\overline{X\cdot\nabla f\cdot\Psi} + \frac{1}{2}g(X, \nabla f)\bar{\Psi}\,, \tag{5}$$

où le gradient ∇f correspond à la métrique g. Par conséquent (2), (3) et (5) montrent que Ψ est D-parallèle sur (M, g) si et seulement si $\bar{\Psi}$ est D-parallèle sur $(M, \bar{g})$.

4 Le cas $n \neq 4$

Théorème 4.1 *Soit D une structure de Weyl sur une variété spinorielle (M^n, g), $n \geq 3$, $n \neq 4$. Supposons qu'il existe sur M un spineur D-parallèle nonnul.*

Alors D est fermée; en particulier, si M est simplement connexe, il existe un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f} g$ tel que $(M, \bar{g})$ admet des spineurs parallèles.

Preuve. Considérons un spineur Ψ sur M qui satisfait (3). On continuera dans la suite à identifier le vecteur θ et la 1-forme qui lui correspond par l'isomorphisme musical induit par g. Considérons un point $x \in M$ fixé et X, Y deux vecteurs parallèles en x et $\{e_i\}$ un repère orthonormé parallèle en x également. Pour alléger les calculs on note $\theta = 2\xi$, et Ψ satisfait alors

$$\nabla_Z \Psi = Z \cdot \xi \cdot \Psi + \langle Z, \xi \rangle \, \Psi, \quad \forall Z\,. \tag{6}$$

En prenant le produit scalaire avec Ψ on trouve $\nabla_Z \langle \Psi, \Psi \rangle = 0$, donc $\langle \Psi, \Psi \rangle$ est une constante strictement positive. Pour $Z = \xi$ dans (6), on obtient

$$\nabla_\xi \Psi = 0 \tag{7}$$

et ensuite, si on pose $Z = e_i$, on multiplie par e_i et on somme sur i dans (6), on trouve

$$P\Psi = (1-n)\, \xi \cdot \Psi\,, \tag{8}$$

$$P^2 \Psi = (1-n)(d\xi + \delta\xi) \cdot \Psi + (n-1)^2 \|\xi\|^2 \Psi\,, \tag{9}$$

où P est l'opérateur de Dirac. D'autre part (la sommation sur l'indice i étant sous-entendue)

$$\begin{aligned} -\nabla^* \nabla \Psi &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \Psi = \nabla_{e_i} (e_i \cdot \xi \cdot \Psi + \langle e_i, \xi \rangle \, \Psi) \\ &= (d\xi + \delta\xi) \cdot \Psi + e_i \cdot \xi \cdot e_i \cdot \xi \cdot \Psi - \|\xi\|^2 \Psi - \delta\xi \, \Psi \\ &= d\xi \cdot \Psi + (1-n) \|\xi\|^2 \Psi\,. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Lichnerowicz et (9) on obtient

$$(n-2)\, d\xi \cdot \Psi = (-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4}) \cdot \Psi \tag{10}$$

Si on fait le produit scalaire avec Ψ, le membre gauche sera imaginaire pur (car $d\xi$ est une 2-forme), et le membre droit sera, évidemment, réel. En particulier

$$(-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4}) \, \langle \Psi, \Psi \rangle = 0\,, \tag{11}$$

donc

$$-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4} = 0\,, \tag{12}$$

car $\langle \Psi, \Psi \rangle$ est une constante non-nulle. De (10) et (12) on obtient

$$d\xi \cdot \Psi = 0\,. \tag{13}$$

En posant $Z = X$ et en dérivant (6) par rapport à Y on trouve

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X \Psi &= X \cdot \nabla_Y \xi \cdot \Psi + X \cdot \xi \cdot Y \cdot \xi \cdot \Psi + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle \, \Psi \\ &\quad + \langle X, \xi \rangle Y \cdot \xi \cdot \Psi + X \cdot \xi \langle Y, \xi \rangle \, \Psi + \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \, \Psi \,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{Y,X} \Psi &= X \cdot \nabla_Y \xi \cdot \Psi - Y \cdot \nabla_X \xi \cdot \Psi + (X \cdot \xi \cdot Y \cdot \xi - Y \cdot \xi \cdot X \cdot \xi) \cdot \Psi \\ &\quad + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle \, \Psi - \langle Y, \nabla_X \xi \rangle \, \Psi \,.\end{aligned}$$

Cette relation, la formule (cf. [8])

$$Ric(X) \cdot \Psi = 2 \, e_i \cdot \mathcal{R}_{e_i, X} \Psi \tag{14}$$

et (13), donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Ric(X) \cdot \Psi &= e_i \cdot (X \cdot \nabla_{e_i} \xi \cdot \Psi - e_i \cdot \nabla_X \xi \cdot \Psi + (X \cdot \xi \cdot e_i \cdot \xi \\ &\quad - e_i \cdot \xi \cdot X \cdot \xi) \cdot \Psi + \langle X, \nabla_{e_i} \xi \rangle \, \Psi - \langle e_i, \nabla_X \xi \rangle) \, \Psi \\ &= (-X \cdot (d\xi + \delta\xi) - 2\nabla_X \xi + n \nabla_X \xi + n X \|\xi\|^2 - 2\xi \cdot X \cdot \xi \\ &\quad - 2X \|\xi\|^2 + n \xi \cdot X \cdot \xi + e_i \langle X, \nabla_{e_i} \xi \rangle - \nabla_X \xi) \cdot \Psi \\ &= (-X \delta\xi + (n-3) \nabla_X \xi + 2(n-2) X \|\xi\|^2 \\ &\quad - 2(n-2) \langle X, \xi \rangle \xi + e_i \langle X, \nabla_{e_i} \xi \rangle) \cdot \Psi \,,\end{aligned}$$

donc, Ψ étant nonnul,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Ric(X) &= -X \delta\xi + (n-3) \nabla_X \xi + 2(n-2) X \|\xi\|^2 \\ &\quad - 2(n-2) \langle X, \xi \rangle \xi + e_i \langle X, \nabla_{e_i} \xi \rangle \,,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Ric(X,Y) &= -\delta\xi \langle X, Y \rangle + (n-3) \langle \nabla_X \xi, Y \rangle + 2(n-2) \langle X, Y \rangle \|\xi\|^2 \\ &\quad - 2(n-2) \langle X, \xi \rangle \langle \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle \,.\end{aligned}$$

Le tenseur de Ricci étant symétrique, on trouve (pour $n \neq 4$)

$$\langle \nabla_X \xi, Y \rangle = \langle \nabla_Y \xi, X \rangle \,, \tag{15}$$

ou, de manière équivalente, $d\xi = 0$. La dernière affirmation du théorème résulte des considérations de la section 3.

QED

5 Le cas $n = 4$

On se tourne maintenant vers le cas où la dimension de M est égale à 4. Le fibré des spineurs se décompose sous l'action de la forme volume vol en $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$, où

$$\Sigma^\pm M = \{\Psi \mid vol \cdot \Psi = \mp \Psi\} \,. \tag{16}$$

Cette décomposition est préservée par la dérivée covariante car vol est parallèle. On notera désormais par $\Psi^\pm$ les projections orthogonales de Ψ sur $\Sigma^\pm M$. Grâce à (16) on voit que changer l'orientation de M revient à interchanger $\Sigma^+ M$ et $\Sigma^- M$. Si un spineur Ψ vérifie l'équation (6), alors ses composantes $\Psi^\pm$ la vérifient aussi, donc quitte à changer éventuellement l'orientation de M, on peut supposer $\Psi \in \Sigma^+ M$.

D'autre part, en dimension 4, l'opérateur de Hodge $*$ agit involutivement sur $\Lambda^2 M$ et définit par conséquent une décomposition orthogonale $\Lambda^2 M = \Lambda_+ M \oplus \Lambda_- M$, où $\Lambda_+ M$ ($\Lambda_- M$) est l'espace propre de $*$ correspondant à la valeur propre 1 (resp. -1). Par rapport à cette décomposition, toute forme $\omega \in \Lambda^2 M$ s'écrit $\omega = \omega_+ + \omega_-$. Les éléments de $\Lambda_+ M$ ($\Lambda_- M$) s'appellent des formes autoduales (resp. anti-autoduales).

Lemme 5.1 *1. Si $\omega \in \Lambda_-$ est une 2-forme anti-autoduale fixée, la restriction à $\Sigma^+ M$ de la multiplication de Clifford par ω est l'endomorphisme nul.*

2. L'homomorphisme $u : \Lambda_+ M \to \Sigma^+ M$ défini par $\omega \mapsto \omega \cdot \Psi$ est injectif pour chaque spineur fixé $\Psi \in \Sigma^+ M$.

Preuve. 1. Le produit de Clifford par une 2-forme est un endomorphisme anti-hermitien de $\Sigma^+ M$. Si la 2-forme ω est, en plus, anti-autoduale, on a

$$\begin{aligned} \omega \cdot \omega \cdot \Psi &= \omega \wedge \omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = -\omega \wedge *\omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi \\ &= -\langle \omega, \omega \rangle vol \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in \Sigma^+ M \,. \end{aligned}$$

Il reste a remarquer qu'un endomorphisme anti-hermitien de carré nul est lui-même nul.

2. Si $\omega \in ker(u)$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \cdot \omega \cdot \Psi = \omega \wedge \omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = \omega \wedge *\omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi \\ &= \langle \omega, \omega \rangle vol \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = -2 \langle \omega, \omega \rangle \Psi \,, \end{aligned}$$

donc $\omega = 0$.

QED

L'équation (13) et le lemme 5.1 impliquent

$$(d\xi)_+ = 0 \,. \tag{17}$$

Supposons que M est compacte. De (17) on déduit $d\xi = - * d\xi$, donc $\delta d\xi = *d * d\xi = - * d^2\xi = 0$. En faisant le produit L^2 avec ξ dans cette égalité on obtient

$$0 = (\delta d\xi, \xi)_{L^2} = \|d\xi\|^2_{L^2}, \tag{18}$$

ce qui montre que $d\xi = 0$. On a donc prouvé le

Théorème 5.1 *Soit D une structure de Weyl sur une variété spinorielle compacte (M^4, g) et supposons que sur M il existe un spineur D-parallèle nonnul. Alors D est fermée, donc en particulier, si M est simplement connexe, il existe un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f}g$ tel que $(M, \bar{g})$ admet des spineurs parallèles.*

Remarque. On verra un peu plus loin que le théorème 5.1 admet une version beaucoup plus précise (Cor. 6.1).

6 Spineurs et structures complexes en dimension 4

Le but de cette section est de montrer que l'existence d'une structure de Weyl possédant des spineurs parallèles est équivalente à l'existence d'une structure hyperhermitienne sur M.

Soit J une structure presque complexe compatible avec la métrique d'une variété riemannienne de dimension 4 et Ω sa forme de Kähler : $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$. La forme de Lee de J, que l'on note ρ, est définie par la formule

$$d\Omega = \rho \wedge \Omega\,, \tag{19}$$

ou, de manière équivalente, $\rho = J\delta\Omega$. Evidemment, J définit une structure kählérienne si et seulement si J est intégrable et $\rho = 0$.

Lemme 6.1 *La structure presque complexe J est intégrable si et seulement si*

$$\nabla_X \Omega = \rho \wedge JX - X \wedge J\rho\,. \tag{20}$$

Preuve. Si (20) est vérifiée, on obtient facilement

$$2(\nabla_X J)Y = \rho\langle JX, Y\rangle - JX\langle \rho, Y\rangle - X\langle J\rho, Y\rangle + J\rho\langle X, Y\rangle\,, \tag{21}$$

ce qui permet de voir par calcul direct que le tenseur de Nijenhuis s'annule. Réciproquement, si $N = 0$, la formule de [7], p.148 donne

$$\begin{aligned}
2(\nabla_X\Omega)(Y, Z) &= 3(\rho \wedge \Omega)(X, Y, Z) - 3(\rho \wedge \Omega)(X, JY, JZ) \\
&= \langle \rho, X\rangle\langle Y, JZ\rangle + \langle \rho, Y\rangle\langle Z, JX\rangle + \langle \rho, Z\rangle\langle X, JY\rangle \\
&\quad -\langle \rho, X\rangle\langle Y, JZ\rangle - \langle \rho, JY\rangle\langle Z, X\rangle + \langle \rho, JZ\rangle\langle X, Y\rangle \\
&= 2(\rho \wedge JX - X \wedge J\rho)(Y, Z)\,.
\end{aligned}$$

QED

Lemme 6.2 *Soit M une variété spinorielle de dimension 4, D une structure de Weyl et $\Psi \in \Sigma^+ M$ un spineur positif sur M. Si Ψ ne s'annule pas sur M, alors il définit une structure presque complexe J sur M. Si, en plus, Ψ est D-parallèle, J est intégrable et D-parallèle et sa forme de Lee ρ satisfait $\rho = -4\xi = -2\theta$.*

Preuve. La dimension complexe de $\Sigma^+ M$ étant égale à 2, le morphisme injectif $TM \to \Sigma^- M$ défini par $X \mapsto X \cdot \Psi$, est en fait un isomorphisme. La structure presque complexe J est alors définie par l'équation

$$JX \cdot \Psi = iX \cdot \Psi\,, \qquad \forall X \in TM\,, \tag{22}$$

et on laisse au lecteur le soin de montrer que J ainsi défini est une structure presque complexe compatible avec la métrique.

De (22) et (6) on déduit par dérivation

$$\begin{aligned} -(\nabla_Y J)X \cdot \Psi &= J(\nabla_Y X) \cdot \Psi - \nabla_Y (JX) \cdot \Psi \\ &= i\nabla_Y X \cdot \Psi - \nabla_Y (JX \cdot \Psi) + JX \cdot \nabla_Y \Psi \\ &= JX \cdot \nabla_Y \Psi - iX \cdot \nabla_Y \Psi \\ &= (JX - iX) \cdot (Y \cdot \xi \cdot \Psi + \langle Y, \xi \rangle \Psi) \\ &= -Y \cdot (JX - iX) \cdot \xi \cdot \Psi - 2\langle JX - iX, Y \rangle \xi \cdot \Psi \\ &= 2\langle JX - iX, \xi \rangle Y \cdot \Psi - 2\langle JX - iX, Y \rangle \xi \cdot \Psi \\ &= 2(\langle JX, \xi \rangle Y - \langle X, \xi \rangle JY - \langle JX, Y \rangle \xi + \langle X, Y \rangle J\xi) \cdot \Psi\,, \end{aligned}$$

donc

$$(\nabla_Y J)X = -2(\langle JX, \xi \rangle Y - \langle X, \xi \rangle JY - \langle JX, Y \rangle \xi + \langle X, Y \rangle J\xi)\,, \tag{23}$$

et un calcul direct montre, comme dans la preuve du lemme précédent, que J est intégrable. La réciproque de ce lemme nous assure alors que la forme de Lee de J est $\rho = -4\xi$. Finalement, à partir de la définition de D il est facile de voir que J est D-parallèle si et seulement si J satisfait (21).

QED

On rappelle qu'en dimension 4, le fibré $\Sigma^+ M$ possède une structure quaternionienne parallèle, c.à.d. un automorphisme $\mathbf{C}$-anti-linéaire $\mathbf{j}$ qui satisfait $\mathbf{j}^2 = -1$ et commute avec le produit de Clifford. On voit alors que si Ψ est D-parallèle, $\mathbf{j}\Psi$ est lui aussi D-parallèle. Soient J_1 et J_2 les structures hermitiennes induites par Ψ et $\Psi + \mathbf{j}\Psi$ (lemme 6.2). On a alors

$$\begin{aligned} J_2 J_1 X \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi) &= iJ_1 X \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi) = -X \cdot \Psi + i\mathbf{j}iX \cdot \Psi \\ &= X \cdot (-\Psi + \mathbf{j}\Psi)\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_1 J_2 X \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi) &= iJ_2 X \cdot \Psi - iJ_2 X \cdot \mathbf{j}\Psi = iJ_2 X \cdot (\Psi - \mathbf{j}\Psi) \\ &= -i\mathbf{j}J_2 X \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi) = -i\mathbf{j}iX \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi) \\ &= X \cdot (\Psi - \mathbf{j}\Psi) = -J_2 J_1 X \cdot (\Psi + \mathbf{j}\Psi)\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $J_2 J_1 = -J_1 J_2$. Le triple $\{J_1,\ J_2,\ J_3 = J_1 J_2\}$ représente alors une structure hyperhermitienne sur M. Réciproquement, la donnée d'une telle structure sur M implique d'abord que les trois structures complexes ont la même forme de Lee (cf. [2]), donc qu'elles sont D-parallèles, D étant la structure de Weyl définie par $-2\theta = \rho$. Le fibré $\Lambda_+ M$ est donc plat par rapport à D, et il en va de même pour le fibré $\Sigma^+ M$, car $\Lambda_+ M = S^2(\Sigma^+ M)$. On a donc prouvé le

Théorème 6.1 *Soit (M^4, g) une variété spinorielle compacte avec une structure de Weyl D. Si M admet un spineur D-parallèle si et seulement si M admet une structure hyperhermitienne $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$, et D est la structure de Weyl qui correspond à la forme de Lee (commune) des structures complexes J_i. La réciproque est également valable si M est simplement connexe.*

Corollaire 6.1 (cf. [2]) *Soit (M^4, g) une variété spinorielle compacte avec une structure de Weyl D et supposons que sur M il existe un spineur D-parallèle nonnul. Alors M est conformément équivalente à une des variétés suivantes:*
- un tore plat;
- une surface $K3$;
- une surface de Hopf quaternionienne avec sa métrique standard localement conformément plate.

7 Exemples noncompacts en dimension 4

On a vu que les seuls exemples qu'on pourrait espérer de solutions nontriviales de notre problème devraient être construits sur des variétés noncompactes de dimension 4. Dans cette section on va présenter un tel exemple, dû essentiellement à D. Joyce (cf. [6]) et porté à notre connaissance par V. Apostolov.

Soit $u : U \subset \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction qui ne s'annule pas sur l'ouvert U, et considérons la métrique riemannienne

$$g_u = dz_1\, d\bar{z}_1 + |u|^2 dz_2\, d\bar{z}_2.$$

Les relations

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = \bar{u}\, dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \quad , \quad \Omega_3 = i\,(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + |u|^2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2),$$

définissent les formes de Kähler de 3 structures presque hermitiennes $J_1,\ J_2,\ J_3$ sur (U, g_u).

On peut vérifier que les formes de Lee de J_1 et J_2 sont toutes les deux égales à

$$\tau = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z_1} dz_1 + \frac{1}{\bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{1}{\bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2} dz_2 + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2,$$

et la forme de Lee de J_3 est donnée par

$$\theta = 2\frac{\partial}{\partial z_1}\ \ln|u|\, dz_1 + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\ \ln|u|\, d\bar{z}_1.$$

De plus, $J_1,\ J_2,\ J_3$ sont intégrables si et seulement si $\tau = \theta$ c.à.d. si et seulement si u est holomorphe.

Par conséquent, si u est holomorphe, $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$ définissent une structure hyperhermitienne sur (U, g_u). Il suffit alors de remarquer que la structure de Weyl définie par $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$ est fermée si et seulement si $d\theta = 0$ ce qui est équivalent à $u^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial u}{\partial z_2}$, pour voir que (U, g_u) est une variété admettant des spineurs parallèles par rapport à une structure de Weyl non-fermée quelle que soit la fonction holomorphe u sans zéros sur U et satisfaisant $u^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2} \neq \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial u}{\partial z_2}$.

References

[1] H. BAUM, T. FRIEDRICH, R. GRUNEWALD, I. KATH, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds,* Seminarbericht **108**, Humboldt-Universität Berlin 1990.

[2] C. BOYER, *A note on Hyperhermitian four-Manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **102** No.1 (1988), 157-164.

[3] O. HIJAZI, *A Conformal Lower Bound for the Smallest Eigenvalue of the Dirac Operator and Killing Spinors,* Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151-162.

[4] N. HITCHIN, *Parallel Spinors,* Adv. in Math. **14** (1974), 1-55.

[5] P. GAUDUCHON, *Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$,* J. reine angew. Math. **469** (1995), 1-50.

[6] D. JOYCE, *Explicit Construction of Self-dual 4-Manifolds,* Duke Math. J. **77**, No.3 (1995), 519-552.

[7] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *The Foundations of Differential Geometry,* (vol. II), Interscience Publishers, New York, 1969.

[8] B. LAWSON, M.-L. MICHELSON, *Spin Geometry,* Princeton University Press 1989.

[9] M. WANG, *Parallel Spinors and Parallel Forms,* Ann Global Anal. Geom. **7** (1989), 59-68.